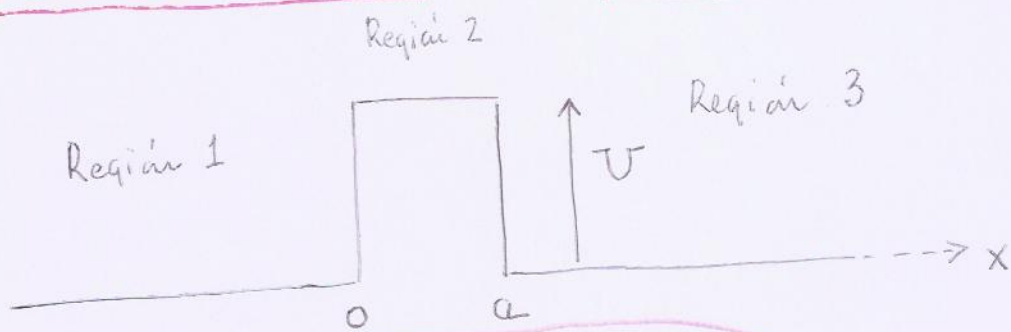


Potencial Barrera o Barrera de Potencial

1



Clásicamente, si $E > U \Rightarrow T = 1$
si $E < U \Rightarrow R = 1$

Cuánticamente, si $E > U \Rightarrow$ existe R
si $E < U \Rightarrow$ existe T

!!!

Cualquiera que sea el caso ($E < U$ o $E > U$) las autofunciones $\Phi_1(x)$ y $\Phi_3(x)$ en las regiones 1 y 3 respectivamente son

$$\Phi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}; \quad x < 0; \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (1)$$

$$\Phi_3(x) = C e^{ik_3 x} + D e^{-ik_3 x}; \quad x > a; \quad k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\text{Definamos } k_1 = k_3 = k \quad (3)$$

Cuando $E > U$, la autofunción en la región 2 es una función oscilatoria dada por

$$\Phi_2(x) = F e^{ik_2 x} + G e^{-ik_2 x}; \quad 0 < x < a; \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} \quad (3)$$

Cuando $E < U$, la autofunción es

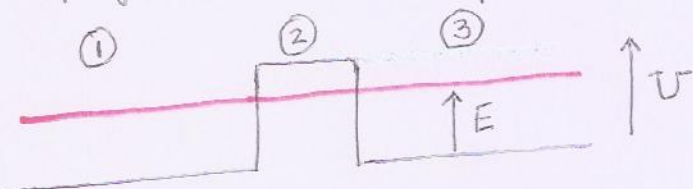
$$\Phi_2(x) = F e^{-\kappa x} + G e^{+\kappa x}; \quad 0 < x < a; \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar} \quad (4)$$

Si la partícula se mueve inicialmente acercándose a $x=0$ por la izquierda,

$$D = 0 \quad (5),$$

pues no hay onda reflejada en la Región 3 ($x > a$).

Caso $E < U$



$$\Phi_1(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (6)$$

$$\Phi_2(x) = F e^{-\kappa x} + G e^{\kappa x} \quad (7)$$

$$\Phi_3(x) = C e^{ikx} \quad (8)$$

Aplicamos continuidad de Φ y $\frac{d\Phi}{dx}$ en $x=0$ y $x=a$:

$$\Phi_1(x) \Big|_{x=0} = \Phi_2(x) \Big|_{x=0} \quad (9)$$

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d\Phi_2(x)}{dx} \Big|_{x=0} \quad (10)$$

$$\Phi_2(x) \Big|_{x=a} = \Phi_3(x) \Big|_{x=a} \quad (11)$$

$$\frac{d\Phi_2(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d\Phi_3(x)}{dx} \Big|_{x=a} \quad (12)$$

$$(9) \Rightarrow A + B = F + G \quad (13)$$

$$(10) \Rightarrow ik(A - B) = \kappa(-F + G) \quad (14)$$

$$(11) \Rightarrow F e^{-\kappa a} + G e^{\kappa a} = C e^{ika} \quad (15)$$

$$(12) \Rightarrow \kappa(-F e^{-\kappa a} + G e^{\kappa a}) = ikC e^{ika} \quad (16)$$

$$\text{donde } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar} \quad (17)$$

Se determinan B, C, F y G en función de A.

El coeficiente de transmisión total es

$$T = \frac{|\vec{J}_{\text{tras}}|}{|\vec{J}_{\text{incl}}|} \quad (18)$$

donde $|\vec{J}_{\text{tras}}| = \frac{\hbar k_3}{m} |\psi_{\text{tras}}|^2 = \frac{\hbar k_3}{m} \Phi_3^*(x) \Phi_3(x) = \frac{\hbar k_3}{m} C^* C \quad (19)$

$$|\vec{J}_{\text{incl}}| = \frac{\hbar k_1}{m} |\psi_{\text{incl}}|^2 = \frac{\hbar k_1}{m} (A e^{ik_1 x})^* (A e^{ik_1 x}) = \frac{\hbar k_1}{m} A^* A \quad (20)$$

$$\Rightarrow T = \frac{k_3}{k_1} \frac{C^* C}{A^* A} = \frac{C^* C}{A^* A} = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left(1 + \frac{(e^{x_0} - e^{-x_0})^2}{16 \frac{E}{U} (1 - \frac{E}{U})} \right)^{-1} \quad (21)$$

El exponente x_0 puede escribirse como:

$$x_0 = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar} a = \sqrt{\frac{a^2}{\hbar^2} 2mU \left(1 - \frac{E}{U}\right)} \quad (22)$$

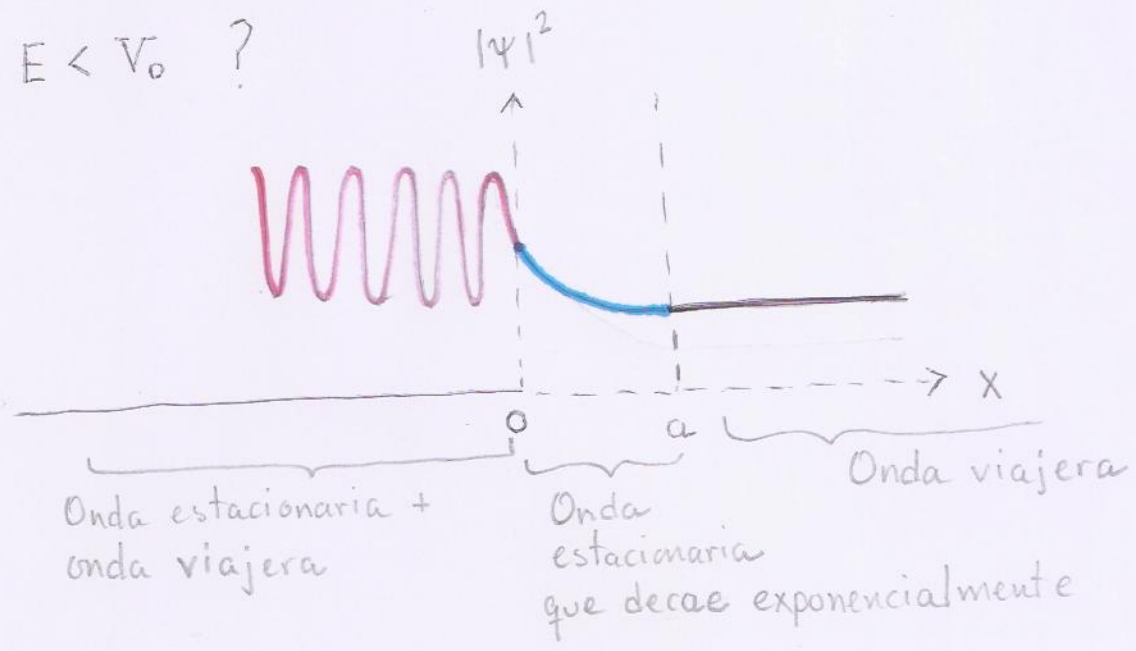
En general $x_0 \gg 1 \Rightarrow e^{-x_0}$ puede despreciarse ante e^{x_0} y el término con el exponencial es muy grande ante 1.

$$T \approx \left(\frac{e^{2x_0}}{16 \frac{E}{U} (1 - \frac{E}{U})} \right)^{-1} = 16 \frac{E}{U} (1 - \frac{E}{U}) e^{-2x_0} \quad (23)$$

De la ecuación anterior podemos sospechar que T es extremadamente pequeño, pero existe !! Esto no se espera clásicamente.

Una partícula que viene de la Región ① hacia $x=0$ con $E < U$ y masa m , tiene cierta probabilidad de atravesar la barrera de potencial de ancho a (zona clásicamente prohibida) y aparecer en la Región ③. (Penetración de barrera ó Efecto Túnel).

¿Cómo es el gráfico de $|\psi|^2$ vs x cuando $E < V_0$?



Ejemplo: electrón es dispersado por un átomo de gas ionizado negativamente contenido en un tubo de descarga de gas. Se modela la interacción repulsiva entre el e^- y el átomo ionizado mediante una barrera de potencial cuya altura es $V = 10 \text{ eV}$ y ancho $a = 1.8 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Del ejemplo 6.2 (pag. 233) se obtuvo que la distancia de penetración de un e^- en la región clásicamente prohibida (fuera de un bloque de cobre) es del orden del Å , que es el mismo orden de magnitud del ancho a de la barrera de potencial del presente problema.

Ya que $T \cong 16 \frac{E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2\kappa a}$ con

$\kappa a = \sqrt{\frac{2mVa^2}{\hbar^2} \left(1 - \frac{E}{V}\right)}$, calculemos cuánto vale $\frac{2mVa^2}{\hbar^2}$ en este caso.

$$\frac{2mVa^2}{\hbar^2} = \frac{2mc^2Va^2}{(\hbar c)^2} = \frac{2 \times 511 \times 10^3 \times 10 \times (0.18)^2}{(197)^2} = 8.53$$

5

$$\begin{cases} \hbar c \approx 197 \text{ MeV fm} = 197 \text{ eV nm} \\ mc^2 = 511 \times 10^3 \text{ eV} \\ a = 1.8 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.18 \text{ nm} \\ V = 10 \text{ eV} \end{cases}$$

Supongamos que $\frac{E}{V} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \kappa a = \sqrt{8.53 \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 2.1$$

$$T \approx 16 \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-2 \times 2.1} = 4 e^{-4.2} = 0.06$$

De 100 electrones que inciden sobre la barrera, 6 logran atravesarla. Esta fracción es apreciable. Ver ejemplo 5.6, pag. 186, Beiser.

Beer: Apéndice del Cap. 5, The Tunnel Effect, pag. 193

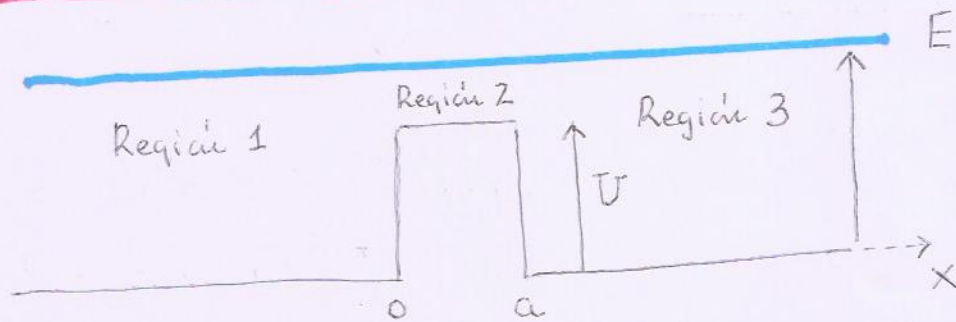
Example 5.6, pag. 186 *

Scanning Tunneling Microscope (STM), pag. 186

Beiser,
Concepts
of Modern
Physics

* Nota: T es más sensible al ancho^a de la barrera que a la energía E de la partícula

Caso $E > U$ Barrera de Potencial



Como E es mayor que la energía potencial en todas las regiones, la función de onda en todo el espacio será una función oscilatoria (en x y t).

Las autofunciones son:

$$\Phi_1(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x} \quad ; \quad x \leq 0 \quad ; \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (1)$$

$$\Phi_2(x) = F e^{ik_2 x} + G e^{-ik_2 x} \quad ; \quad 0 \leq x \leq a \quad ; \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\Phi_3(x) = C e^{ik_3 x} + D e^{-ik_3 x} \quad ; \quad x \geq a \quad ; \quad k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (3)$$

Las funciones de onda son:

$$\Psi_1(x, t) = \Phi_1(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (4)$$

$$\Psi_2(x, t) = \Phi_2(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (5)$$

$$\Psi_3(x, t) = \Phi_3(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (6)$$

Aplicando condiciones de borde en $x=0$ y $x=a$ para Φ y $\frac{d\Phi}{dx}$ tenemos:

$$\text{En } x=0 \quad A + B = F + G \quad (7)$$

$$ik_1(A-B) = ik_2(F-G) \quad (8)$$

$$\text{En } x=a \quad F e^{ik_2a} + G e^{-ik_2a} = C e^{ik_1a} \quad (9)$$

$$ik_2a(F e^{ik_2a} - G e^{-ik_2a}) = ik_1 C e^{ik_1a} \quad (10)$$

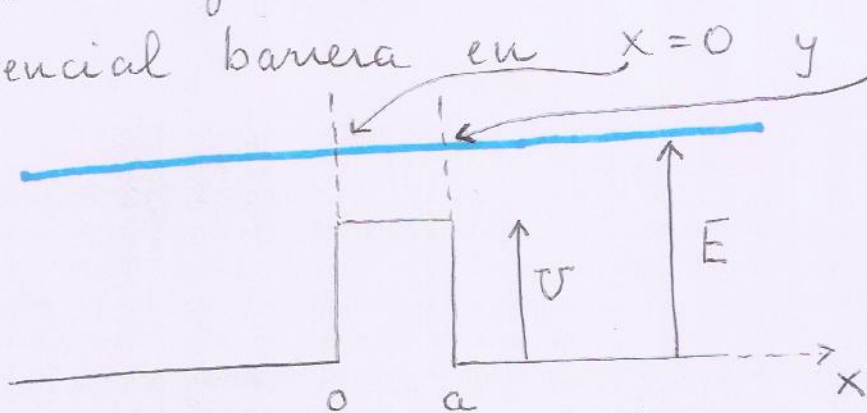
Obtenemos B, C, F y G en función de A. Luego:

$$T = \frac{|\vec{J}_{\text{tras}}|}{|\vec{J}_{\text{inc}}|} = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left(1 - \frac{(e^{ik_2a} - e^{-ik_2a})^2}{16 \frac{E}{U} \left(\frac{E}{U} - 1 \right)} \right)^{-1} \quad (11)$$

$$T = \left(1 + \frac{\text{Sen}^2(k_2a)}{4 \frac{E}{U} \left(\frac{E}{U} - 1 \right)} \right)^{-1} \quad \text{con } k_2a = \sqrt{\frac{2mUa^2}{\hbar^2} \left(\frac{E}{U} - 1 \right)} \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\text{Sen}^2(k_2a)}{4 \frac{E}{U} \left(\frac{E}{U} - 1 \right)}} \quad (13)$$

De esta expresión se observa que T en general es menor que 1 (Ver Fig. 6.15) lo que se debe a reflexiones que ocurren en las discontinuidades del potencial barrera en $x=0$ y $x=a$.



Sin embargo, existe transmisión total ($T=1$) cuando

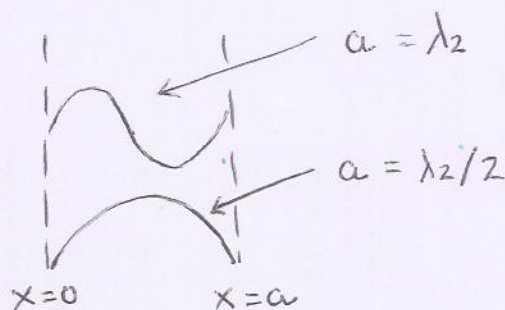
$$\text{Sen}(k_2 a) = 0 \quad (14)$$

$$\Rightarrow k_2 a = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_2} a = n\pi$$

$$\Rightarrow a = n \left(\frac{\lambda_2}{2} \right) \quad (15)$$

La ecuación (15) indica que, por ejemplo, un e^- que incide sobre una nube de gas ionizado negativamente y que experimenta por lo tanto una fuerza repulsiva, tiene la posibilidad de atravesarlo sin ser reflejado en absoluto si la energía de dicho electrón es tal que la longitud de onda λ_2 del electrón en la región ② (región donde existe la barrera de potencial) tiene un valor que hace que el ancho a de la barrera es un número entero de medias longitudes de onda



Se sugiere al estudiante encontrar una expresión para las energías del electrón con las que se logra este efecto denominado "Efecto Ramsauer". ($U = 10 \text{ eV}$, $a = 1.8 \times 10^{-10} \text{ m}$)

Solución

$$k_2 a = n\pi = \sqrt{\frac{2mUa^2}{\hbar^2} \left(\frac{E_n}{U} - 1 \right)} \quad (16)$$

$$n^2 \pi^2 = \frac{2mUa^2}{\hbar^2} \left(\frac{E_n}{U} - 1 \right) \Rightarrow \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mUa^2} = \frac{E_n}{U} - 1$$

$$\Rightarrow E_n = U + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (17)$$

$$U = 10 \text{ eV}; \quad mc^2 = 511 \times 10^3 \text{ eV}; \quad \hbar = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad (18)$$

$a = 1.8 \times 10^{-10} \text{ m}$ $h = 4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$

$$E_n = U + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2 c^2}{8\pi^2 mc^2 a^2} = U + \frac{n^2}{8} \frac{1}{mc^2} \left(\frac{hc}{a} \right)^2$$

$$E_n = U + \frac{n^2}{8} \frac{1}{(511 \times 10^3 \text{ eV})} \left(\frac{4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \times 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.8 \times 10^{-10} \text{ m}} \right)^2$$

$$E_n = U + 11.546 n^2 \quad (\text{eV})$$

$$n=1 \Rightarrow E_1 = 21.5 \text{ eV}$$

$$n=2 \Rightarrow E_2 = 56.2 \text{ eV}$$

⋮

Lectura sugerida a los estudiantes

10

A) Eisberg - Resnick , pags. 245 - 247

B) Sección 6.6 Ejemplos de penetración de barrera
pags. 247 - 251.

i) Decaimiento α

ii) Molécula de amonio (NH_3).